

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

S 73 (M 38)

Een zuivere toets voor de hypothese $\sigma = \sigma_0$ bij een steekproef
- uit een normale verdeling met onbekend gemiddelde.



Een zuivere toets voor de hypothese $\sigma = \sigma_0$ bij een steekproef uit een normale verdeling met onbekend gemiddelde¹⁾.

Gegeven zij een steekproef $x_1, \dots, x_N$ uit een normale collectie²⁾ met gemiddelde μ en spreiding σ , die beide onbekend zijn. De te toetsen hypothese H_0 is $\sigma = \sigma_0$; de alternatieve hypothesen houden in $\sigma \neq \sigma_0$.

Onder een zuivere toets voor een hypothese H_0 wordt verstaan een toets, waarbij de kans om H_0 te verwerpen minimaal is wanneer H_0 juist is.

J.W. FERTIG [1] heeft met behulp van de theorie van NEYMAN en PEARSON [2] een zuivere toets afgeleid voor het bovenbeschreven geval. Als toetsingsgrootheid wordt hierbij gebruikt (in de notatie van Fertig):

$$\underline{z} = \underline{v}^{\frac{N-1}{2} - \frac{1}{2}\underline{v}},$$

waarin

$$\underline{v} = \frac{\sum_{i=1}^N (\underline{x}_i - \bar{\underline{x}})^2}{\sigma_0^2},$$

met

$$\bar{\underline{x}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \underline{x}_i.$$

Onder alle alternatieve hypothesen, dus zowel voor $\sigma > \sigma_0$ als voor $\sigma < \sigma_0$, zullen de kleinere waarden van $\underline{z}$ waarschijnlijker worden dan onder $H_0: \sigma = \sigma_0$. Bij de toetsing wordt dan ook $\underline{z} \leq \underline{z}_\alpha$ als kritieke zône gebruikt, waarbij $\underline{z}_\alpha$ voldoet aan

$$P[\underline{z} \leq \underline{z}_\alpha | H_0] = \alpha,$$

als α de gekozen onbetrouwbaarheidsdrempel van de toets is.

 1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of naar volledige exactheid.

2) D.w.z. $x_1, \dots, x_N$ zijn onderling onafhankelijke waarnemingen van een grootheid x , die een normale verdeling bezit, dus waarvoor geldt:

$$P[x \leq x] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-\mu)^2} du.$$

FERTIG geeft een tabel van de overschrijdingskansen³⁾ (benaderd) bij verschillende waarden van $\underline{z}$ en voor een opklimmend aantal vrijheidsgraden $n = N-1$ van 1 tot en met 50. Voor het gebruik van deze tabel is het niet nodig de waarde van $\underline{z}$ te berekenen, daar Fertig voor de tabel in plaats van z de waarde van

$$\underline{k} = {}^{10}\log\left(\frac{e^{\frac{v}{N-1}}}{\frac{v}{N-1}}\right)$$

gebruikte.

Ter vereenvoudiging van de uitvoering der toets geeft Fertig een grafiekje waaruit bij een gevonden waarde van $\frac{v}{N-1}$ direct de bijbehorende waarde van $\underline{k}$ kan worden afgelezen.

Opmerking. NEYMAN en PEARSON [2] vermelden reeds, dat de gebruikelijke toets bij het bovenbeschreven probleem onzuiver is. Deze toets is gebaseerd op v en gebruikt een tweezijdige kritieke zône: $v \leq v_1$ en $v \geq v_2$, waarbij voor v_1 en v_2 geldt:

$$P[v \leq v_1 | H_0] = P[v \geq v_2 | H_0] = \frac{1}{2} \alpha,$$

wanneer we α als onbetrouwbaarheidsdrempel van de toets kiezen.

Litteratuur.

- [1] J.W. Fertig, A test of a sample variance based on both tail ends of the distribution.
Ann. of Math.Stat., VIII (1937), pp 193-205
(met tabel).
- [2] J. Neyman, E.S. Pearson, Contributions to the theory of testing statistical hypotheses.
Stat. Res. Mem., I (1936), pp 1-37 en II
(1938), pp 25-57.

3) De overschrijdingskans bij een gevonden waarde z van $\underline{z}$ is de kans dat deze of een kleinere waarde van $\underline{z}$ gevonden zal worden, indien H_0 juist is.